Supponiamo ora di avere nel piano un sistema di *m* punti disposti in modo qualunque e distribuiti in due gruppi, l'uno di *r* e l'altro di m — *r* punti; e sieno ai ? P,- > T* k coordinate deU'i-esimo di tali punti. Poscia consideriamo un punto *O* le cui coordinate X, 7, Z sieno funzioni delle coordinate degli *m* punti del sistema, e due altri punti, O_r ed $0^{\wedge}_{r>}$ le cui coordinate $X_{f)}$ Y_{r9} Z_r ed X_{M_r}, F_{m_r}, $Z^{\wedge}_r$ sieno rispettivamente formate colle coordinate dei primi *r* punti e degli ultimi *m* — r punti del sistema nello stesso modo in cui quelle del punto *O* sono formate colle coordinate di tutti gli *m* punti. Supponiamo finalmente che, per la natura delle funzioni X, X_r, X_{m_r} ed analoghe, si abbia

Ciò posto, se l'equazione

$$Lx \text{ -j- } My \text{ -f- } N^{\wedge} = o$$

rappresenta la retta che congiunge i due punti O_r ed O_{w_r}, si

avranno le due identità :

$$LX_r + MY_r + NZ_r = o, \qquad LX_{m_r} \text{ 4- } MY_{m_r}$$

$+ NZ_{m_r} ==$ o, e quindi anche la seguente:

$$L\ (X_r \text{ 4- } X_{OT_r}) + M(F_r + 7_{m_r}) + N(Z_r \text{ 4- } Z_) = o\ ,$$

ossia, per le fatte ipotesi ,

$$LX+MF\text{-f- } NZ=o.$$

Quest'ultima equazione mostra che *la retta in discorso contiene il punto* O, *e db, non solo qualunque sia il numero m dei punii del sistema, ma anche qualunque, sia il modo in cui questi m punti sono distribuiti nei due gruppi considerati.*

Le condizioni imposte alle funzioni X, F, *Z* sono soddisfatte ponendo

? ___. Ti_I Ta_ I I Tm

dove

ed allora il punto O diventa quello che dicesi *centro armonico* del sistema di punti ri-